Tema 1

TEMA 1: Determinar la matriz de aplicación lineal $F: \mathbb{R}^3 \to P_3$ con respecto a las bases
$S = \{(1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\}$ y $T = \{t^3,\ t^2+t,\ t+1,\ 1\}$, $F(x,y,z) = xt^3 + yt + (y+z)$ (5p)

$S = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$; $T = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{(t^3); (t^2+t); (t+1); (1)\}$

$F(u_1) = (t^3) \to \overline{F}(u_1) = 1 \cdot v_1 \to \overline{F}(u_1) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ → Coordenadas de la transformación en la base "$\overline{T}$"

$\overline{F}(u_2) = (t^3) + (t+1) \to \overline{F}(u_2) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_3 \to \overline{F}(u_2) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\overline{F}(u_3) = t^3 + t + 2 \to \overline{F}(u_3) = (t^3) + (t+1) + (1) \to \overline{F}(u_3) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$

$M_{S \to \overline{T}} = \left[\overline{F}(u_1)\ \overline{F}(u_2)\ \overline{F}(u_3)\right] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Tema 2

TEMA 2: Considere la base $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$, formada por los vectores $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,\ 1)\ y\ v_3 = (1,-1,-1)$. Determine la matriz de cambio de base $P: S \to \acute{S}$ de S a la base ortonormal $\acute{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$, obtenida de S utilizando el algoritmo de Gram- Schmidt. (7p)

$v_1 = t_1$

$$t_2 = v_2 - Proy_{t_1} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{v_2 \cdot t_1}{t_1 \cdot t_1} \cdot t_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$t_3 = v_3 - Proy_{t_1} v_3 - Proy_{t_2} v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{v_3 \cdot t_1}{t_1 \cdot t_1} t_1 - \frac{v_3 \cdot t_2}{t_2 \cdot t_2} t_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4/3}{8/3}\begin{bmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$t_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \to B = \{t_1, t_2, t_3\} \to$$ Se debe ortonormalizar, o sea, módulo 1 cada vector

$$\hat{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

P/ la matriz de cambio de base de S a $\hat{S}$, se deben hallar los vectores de la base S, como combinación lineal de los vectores de $\hat{S}$, y estos coeficientes serían los vectores columna de la matriz de cambio de base.

$$v_1 = a_1 \cdot u_1 + b_1 \cdot u_2 + c_1 \cdot u_3 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1, u_2, u_3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$b = Ax$

A siempre será la misma, b es lo que irá cambiando.

a) $$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ \to \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -3/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \to \begin{matrix} c_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_1 = \sqrt{3} \end{matrix} \to x_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 2\sqrt{6}/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ & & & -1 \end{array}\right] F_2 = F_2 - F_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -3/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & \end{array}\right] \to c_2 = 0$$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\bar{F}_3 = \bar{F}_3 - \bar{F}_1]{\bar{F}_2 = \bar{F}_2 - \bar{F}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -3/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow$

$c_2 = 0$

$b_2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\bar{F}_3 = \bar{F}_3 - \bar{F}_1]{\bar{F}_2 = \bar{F}_2 - \bar{F}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -3/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{2} & -2 \end{array}\right] \rightarrow$

$c_3 = \sqrt{2}$

$b_3 = \sqrt{6}/3$

$a_3 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

$x_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

La Matriz de cambio de base finalmente queda como:

$$M_{S \to \hat{S}} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & 2\sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Tema 3

TEMA 3: Determinar los valores de a y b para que la función f sea un producto interno en $\mathbb{R}^2$, para $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(u,v) = x_1x_2 - 3x_1y_2 + ay_1x_2 + by_1y_2$ (5p)

Para que sea un producto interno, si $u=(x_1,y_1)$ y $v=(x_2,y_2) \rightarrow u.v = x_1x_2 + y_1y_2$

$f(u,v) = x_1x_2 - 3x_1y_2 + ay_1x_2 + by_1y_2$ $\xrightarrow{b=1}$ $-3x_1y_2 + ay_1x_2 = 0$

debe ser cero

$$a = \frac{3x_1y_2}{y_1x_2} \quad ; \quad b = 1$$

Tema 4

TEMA 4: Determina los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (7p)

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 3.1.4 + 2.(-1).(-1) - \left[4(2-\lambda).2 + (1-\lambda).(-1).1 + 3(-1-\lambda)(-1)\right] = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 + 12 + 2 - (16 - 8\lambda - 1 + \lambda + 3 + 3\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1, -2, 3}$$

Vectores propios se hallan p/ cada λ, la solución de $(A - \lambda I)x = 0$

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Los cálculos ya no quiero hacer, vi en Internet nomás ya los veot. propios)

Tema 5

TEMA 5: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (10p)

a) Determinar una expresión que permita calcular A^n
b) De ser posible, utilizar la expresión hallada para calcular A^5

Si A podemos expresar como $A = PDP^{-1}$, el problema estará resuelto. P/ hallar la matriz "P" hallamos los autovalores y luego los autovectores.

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = -1, 5$$
$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = -1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} x_2 = t \\ x_1 = -2t \end{matrix} \rightarrow x = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = 2F_2 + F_1} \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} x_2 = t \\ x_1 = t \end{matrix} \rightarrow x = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Entonces:

a) $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$$A^n = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot(-1^n) & 5^n \\ -1^n & 5^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3\left(2\cdot(-1)^n + 5^n\right) & 2/3\left(5^n - (-1)^n\right) \\ 1/3\left(5^n - (-1)^n\right) & 1/3\left(2\cdot 5^n + (-1)^n\right) \end{bmatrix}$$

b) $A^5 = \begin{bmatrix} 1/3\left(5^5 - 2\right) & 2/3\left(5^5 + 1\right) \\ 1/3\left(5^5 + 1\right) & 1/3\left(2\cdot 5^5 - 1\right) \end{bmatrix}$